

多边形单元网格自动生成技术

王兆清¹⁾ 李淑萍²⁾

¹⁾ (山东建筑大学工程力学研究所, 济南 250101) ²⁾ (山东警察学院治安系, 济南 250101)

摘 要 近年来兴起的多边形有限元方法, 在有限元计算中采用多边形单元划分网格, 不仅可以更好地适应求解区域的几何形状, 而且增加了网格划分的灵活性。为了方便有效地生成多边形单元网格, 在 Delaunay 三角形的基础上, 通过将共圆 Delaunay 三角形合并为一个圆内接多边形, 首先提出了 Delaunay 多边形的概念, 进而提出了一种多边形网格自动生成的 Delaunay 多边形化算法。利用该 Delaunay 多边形化技术, 对工程中常见的几何形状进行网格划分的具体算例表明, Delaunay 多边形化方法可以生成性质优良的多边形单元网格。

关键词 多边形单元 网格生成 Delaunay 三角化 Delaunay 多边形化

中图法分类号: TP391.72 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2007)07-1307-05

Automatic Generation Technique for Polygonal Element Meshes

WANG Zhao-qing¹⁾, LI Shu-ping²⁾

¹⁾ (Institute of Engineering Mechanics, Shandong Jianzhu University, Jinan 250101)

²⁾ (Department of Public Security, Shandong Institute of Police, Jinan 250101)

Abstract In polygonal finite element method, using polygons to generate meshes can describe complexity geometric shapes more accurately and can enhance the flexibility of meshes generation. In this paper the Delaunay polygon is constructed based on Delaunay triangulation by incorporating the Delaunay triangulants of a shared Delaunay circumcircle. The algorithm of Delaunay polygonization for polygonal elements grids generation is presented. Each polygonal mesh generated by Delaunay polygonization is unique. Some geometric domains usually used in engineering are meshed using the proposed technique. Mesh examples demonstrate that the Delaunay polygonization technique can generate excellent polygonal networks.

Keywords polygonal element, mesh generation, Delaunay triangulation, Delaunay polygonization

1 引言

众所周知,有限元法是一种依赖于求解区域网格划分的数值方法,在有限元法计算中,有限元网格生成称为前处理过程。由于在计算过程中,有限元法是按单元生成单元矩阵,且其组装得到的系统矩阵是对称带状的,因此其程序实现简单、计算效率高。由于有限元法的前处理过程在有限元计算中占用大量的计算时间,因此一个好的有限元网格对提高计算效率和计算精度起着关键的作用。有限元网格生成是工程科学和计算科学相结合的研究领域,随着计算机硬件运算能力的不断提高和计算几何理

论的发展,对于有限元网格生成方法的研究已取得许多重要的成果,不但提出了许多有效的算法,并且研制了一些成功的工程化软件^[1,2]。

在实际工程计算中,常用的有限元网格生成方法是 Delaunay 三角化法^[3,4]。Delaunay 三角化 (Delaunay triangulation, DT) 是目前流行的通用全自动网格生成方法之一^[2]。Delaunay 三角化有最大-最小角和空外接圆两个重要特性。由于最大-最小角特性使它在 2 维情况下能自动避免生成小内角的长薄单元,因此特别适用于有限元网格生成;空外接圆特性是指 Delaunay 三角化中每一个三角形单元外接圆的内部,都不包含其他的节点,许多的 Delaunay 三角化算法都利用了这一特性。但是,对

于给定的一组节点, Delaunay 三角化生成的网格是不唯一的。例如, 对于共圆的 4 个节点, 就存在两种 Delaunay 三角化网格。由于 Delaunay 三角化网格的不唯一性, 因此在数值计算时, 节点的微小扰动均可能造成数值计算的不稳定^[5]。

近年来, 国内外学者先后提出了以多边形为单元的数值计算方法^[6], 主要有 Ghosh 等提出的 Voronoi 单胞有限元法^[7]、王兆清等提出的有理单元法^[8]和 Sukumar 等提出的协调多边形有限元法^[9]等。利用多边形单元网格, 能够更好地适应复杂区域形状和提高区域网格划分的灵活性。目前, 能自动生成多边形单元网格的方法为给定节点的 Voronoi 图算法^[7], 但是由 Voronoi 图生成的多边形单元的顶点与初始输入的节点是完全不同的, 也不符合工程上的习惯要求。

本文在 Delaunay 三角化算法的基础上, 提出了一种 Delaunay 多边形化算法, 并给出一种多边形单元网格的自动生成方法。

2 Voronoi 图与 Delaunay 三角化

Voronoi 图 (Voronoi diagram) 及其对偶 Delaunay 三角化 (Delaunay triangulation) 的概念来自于计算几何, 它是由一组不规则点定义的最基本的几何结构^[10]。

在 2 维空间, 由平面域上给定的 n 个离散节点集合 $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 做任意两节点 $x_i, x_j (i \neq j)$ 的垂直平分线, 该垂直平分线将平面域分成两个分别包含节点 $x_i, x_j (i \neq j)$ 的半平面, 其中包含节点 x_i 所有半平面的交集构成一个凸多边形区域 (封闭的或无界的), 即为对应节点 x_i 的 Voronoi 单胞; 两个 Voronoi 单胞的公共边界称为 Voronoi 边; Voronoi 边的端点称为 Voronoi 顶点。由集合 S 的所有 Voronoi 边构成的图形称为 Voronoi 图。

将具有共同边界的 Voronoi 单胞对应的节点连接所得到的三角形称为 Delaunay 三角形, 所得到的三角形网格称为 Delaunay 三角化。Delaunay 三角化是 Voronoi 图的对偶, 其含义是, 两个节点具有一条 Delaunay 边, 当且仅当这两个节点的 Voronoi 单胞具有共同 Voronoi 边。

Delaunay 三角化有以下两个重要的性质 (其在 Delaunay 三角化中具有重要作用): (1) 最大-最小角性质, 即在给定节点所有可能生成的三角形中, Delaunay 三角形最大化最小角; (2) 空外接圆性质,

即若 $DT(p, q, r)$ 是节点集合 S 的一个 Delaunay 三角形, 则 $DT(p, q, r)$ 的外接圆内部不含有集合 S 的其他点。

经典的 Delaunay 三角化算法已经相当成熟^[11,12], 近年来的研究重点是约束 Delaunay 三角化的边界恢复算法^[13-15]和曲面网格生成算法^[16,17]。

3 Delaunay 多边形化

从数值计算的角度看, 最优的区域三角形网格划分应满足三角形单元尽可能充满其外接圆。可见, 正三角形单元应该是区域划分的最优单元。但是, 对于任意给定的节点分布, Delaunay 三角化并不能生成正三角形单元。对于顶点共 Delaunay 圆的两个 Delaunay 三角形, 如果将其合并为一个四边形单元, 则这个四边形单元充满外接圆的效果比单独的两个三角形要好得多。同时, 将顶点共 Delaunay 圆的三角形合并, 还可以克服 Delaunay 三角化不唯一的问题。由此, 本文引入 Delaunay 多边形化的概念。

定义 对于给定平面节点的 Delaunay 三角化网格, 若将共 Delaunay 圆的三角形合并为圆内接多边形, 则得到的多边形称作 Delaunay 多边形。由平面节点生成的 Delaunay 多边形单元网格称作 Delaunay 多边形化。

由 Delaunay 多边形化的定义可知, 如果 n 个节点分布在同一个圆上, 则由这 n 个节点生成的 Delaunay 多边形为一个圆内接 n 边形。6 节点共圆的 Delaunay 三角化和 Delaunay 多边形化网格如图 1 所示。

利用 Delaunay 多边形化技术, 可以在 Delaunay 三角化的基础上自动生成多边形单元网格。但应当注意到, 在有些情况下, Delaunay 三角化网格和 Delaunay 多边形化网格是相同的。只是, 对于一些特殊的节点分布, 两者有明显的区别。同时, 对于一

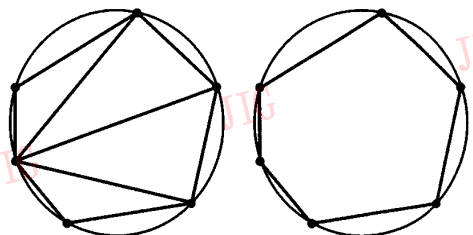


图 1 平面共圆 6 节点的 Delaunay 三角化网格和 Delaunay 多边形化网格

Fig. 1 Delaunay triangulation and Delaunay polygonization of six nodes on a circle

些均匀分布的节点,利用 Delaunay 多边形化就可以自动生成四边形单元网格。

在区域的 Delaunay 多边形化过程中,关键是如何判断两个或多个 Delaunay 三角形是否共圆。本文采用判断两个三角形的外接圆圆心是否重合的方法来判断两个或多个 Delaunay 三角形是否共圆。考虑到计算机的计算误差,在实际编程计算过程中,给定一个充分小的正数 $\delta > 0$ (δ 至少要小于所给节点中任意两个节点距离的最小值),如果两个三角形的外心距小于 δ ,则认为两个三角形共 Delaunay 圆。

本文的多边形单元网格自动生成程序采用 MATLAB 语言编写。在程序编写中,充分利用了 MATLAB 已有的功能命令,以简化程序的编写。节点的 Delaunay 三角化给出 Delaunay 三角化单元的节点索引矩阵。考虑到生成的 Delaunay 多边形单元节点数不完全一致,因此对多边形单元的节点编号采用 MATLAB 的单元 (cell) 数组存储。Delaunay 多边形单元的节点均按逆时针排列。

完整的 Delaunay 多边形化网格自动生成过程如下:

- (1) 输入节点坐标矩阵 X, Y ;
- (2) 由 $tri = delaunay(X, Y)$ 生成 Delaunay 三角化单元节点索引矩阵;
- (3) 计算每一个 Delaunay 三角形的外心和任意两个三角形的外心距;
- (4) 给定一个充分小的正数 $\delta (\delta > 0)$,由三角形的外心距是否小于 δ 为标准,判断两个三角形是否共圆;
- (5) 对于共圆的三角形,可通过合并其节点索引和删除重复节点来得到多边形单元的节点索引,并将其存储在多边形单元节点索引单元数组中;对于不与其他三角形共圆的三角形,则直接将三角形节点索引存储到多边形单元节点索引单元数组中;
- (6) 对每一个多边形节点索引,按逆时针方向排列,即得到最终的多边形单元节点索引;
- (7) 由多边形单元索引和节点坐标绘制区域的 Delaunay 多边形化网格。

在对凸区域进行 Delaunay 多边形化的过程中,应当注意,凸区域边界上的关键点(区域凸壳的顶点)应当布置节点,以保证 Delaunay 多边形化网格能够覆盖整个区域。对于凹区域,应当采用约束 Delaunay 三角化法,以确保不生成一些落在区域外

部的三角形单元。

在实际多边形单元网格生成过程中, Delaunay 多边形化结果的稳定性和精度与 δ 值密切相关,根据作者的经验, δ 取 10^{-6} 就可以保证 Delaunay 多边形化结果的稳定性和精度。

4 多边形单元网格自动生成算例

为验证本文方法自动生成多边形单元网格的效果,利用 Delaunay 多边形化技术,对一些工程中常见的区域进行了 Delaunay 多边形网格划分。

算例 1 含有孔洞的无限大板

本算例是对一个含有圆形孔洞的无限大板,由对称性取四分之一进行网格划分,即在区域上布置 207 个节点, Delaunay 三角化生成 365 个三角形单元(如图 2 所示)。Delaunay 多边形化生成 201 个单元,其中三角形单元 42 个,四边形单元 159 个(如图 3 所示)。本算例生成的 Delaunay 多边形单元为矩形单元,在网格过渡部分自动采用三角形单元进行过渡。

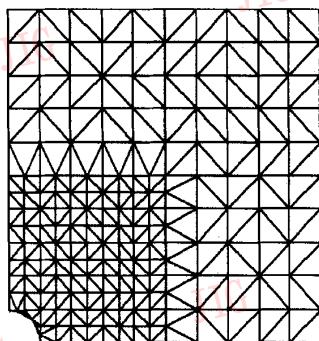


图 2 Delaunay 三角化网格

Fig. 2 Delaunay triangulation

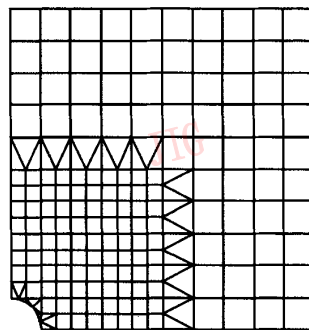


图 3 Delaunay 多边形化网格

Fig. 3 Delaunay polygonization

算例 2 方板中含有圆形夹杂

本算例是对一个含有半径为 0.1 的圆形夹杂, 边长为 1 的方板进行多边形网格划分。划分时, 在区域内布置 131 个节点, 其中在圆形夹杂的边界上均匀布置 10 个节点。其 Delaunay 多边形化生成的网格如图 4 所示。本算例在夹杂处自动生成一个正十边形单元。

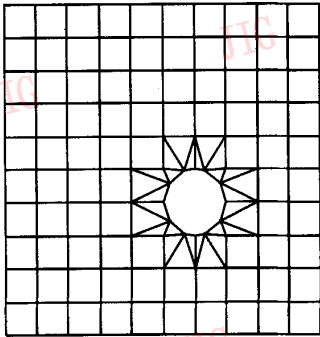


图 4 Delaunay 多边形化网格
Fig.4 Delaunay polygonization

算例 3 扇形区域

本算例是对一个半径为 1 的四分之一圆扇形进行网格划分。划分时, 在区域内布置 91 个节点, 其 Delaunay 多边形化网格如图 5 所示。

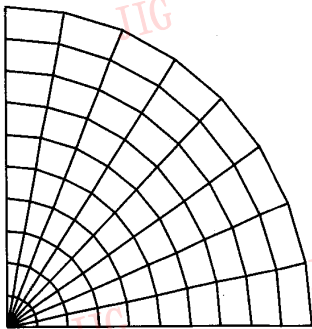


图 5 Delaunay 多边形化网格
Fig.5 Delaunay polygonization

算例 4 含有方孔和圆孔的方板

本算例针对一个含有正方形孔和圆孔的方形板进行网格划分, 板的边长为 1 个单位, 方孔的边长为 0.2 个单位, 圆孔的半径为 0.1 个单位。划分时, 在区域内布置 129 个节点, 其中在方孔的 4 个顶点分别布置一个节点, 在圆孔的边上均匀布置 10 个节点, 其 Delaunay 多边形化网格如图 6 所示。

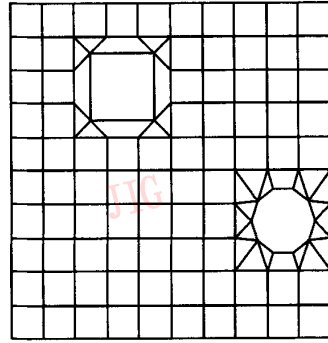


图 6 Delaunay 多边形化网格
Fig.6 Delaunay polygonization

算例 5 圆形区域

本算例针对一个半径为 1 个单位的圆形区域进行网格划分。划分时, 在区域内布置 160 个节点, 其 Delaunay 多边形化网格如图 7 所示。

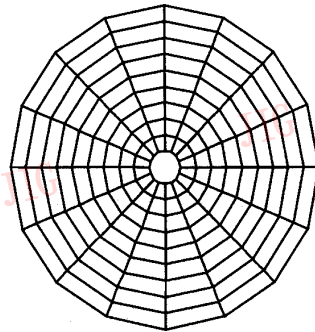


图 7 Delaunay 多边形化网格
Fig.7 Delaunay polygonization

5 结 论

在有限元法计算中, 采用多边形单元网格可以提高网格划分的灵活性。对于非均质复合材料的数值模拟问题, 采用多边形单元还可以自动适应不同相材料区域的形状。目前的文献中多采用 Voronoi 图自动生成多边形单元网格, 但是采用 Voronoi 图生成的网格节点与初始输入的节点是完全不同的。Delaunay 三角化是三角形网格自动生成的常用方法, 但是 Delaunay 三角化是不唯一的, 这在计算过程中可能产生数值不稳定的问题。

本文通过合并共圆 Delaunay 三角形来产生一个多边形, 进而提出了 Delaunay 多边形化的概念, 同时利用节点的 Delaunay 多边形化, 提出了多边形

单元网格自动生成的 Delaunay 多边形化算法。该算法在求解区域能自动生成性质优良的混合网格,而且利用 Delaunay 多边形化技术生成的多边形单元网格是由输入节点唯一确定的。

本文还给出了 Delaunay 多边形化的计算步骤。由于 Delaunay 多边形化技术是建立在 Delaunay 三角化的基础上的,其在实际计算过程中能够充分利用 Delaunay 三角化技术已有的成果,从而使得 Delaunay 多边形化技术很容易实现。

本文利用 Delaunay 多边形化技术,对 5 种不同区域进行 Delaunay 多边形网格划分的算例表明, Delaunay 多边形化技术不仅生成的三角形单元网格继承了 Delaunay 三角化单元的优良性质,而且多边形单元在适应区域形状方面比传统的有限元网格有较大的提高。

参考文献 (References)

- Hu En-qiu, Zhang Xin-fang, Xiang Wen, *et al.* A review of mesh generation methods for finite element computation [J]. *Journal of Computer Aided Design and Computer Graphics*, 1997, **9**(4): 378 ~ 383. [胡恩球, 张新访, 向文等. 有限元网格生成方法发展综述[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 1997, **9**(4): 378 ~ 383.]
- Guan Zhen-qun, Song Chao, Gu Yuan-xian, *et al.* Recent advances of research on finite element mesh generation methods[J]. *Journal of Computer Aided Design and Computer Graphics*, 2003, **15**(1): 1 ~ 14. [关振群, 宋超, 顾元宪等. 有限元网格生成方法研究的新进展[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2003, **15**(1): 1 ~ 14.]
- Shewchuk J R. Delaunay refinement mesh generation [D]. Pittsburgh, PA, USA: Carnegie Mellon University, 1997.
- Shewchuk J R. Delaunay refinement algorithm for triangular mesh generation[J]. *Computational Geometry*, 2002, **22**(1-3): 21 ~ 74.
- Hiyoshi H. Study on interpolation based on Voronoi diagrams [D]. Tokyo, Japan: University of Tokyo, 2000.
- Wang Zhao-qing. Advances in polygonal finite element method[J]. *Advances in Mechanics*, 2006, **26**(3): 344 ~ 353. [王兆清. 多边形有限元研究进展[J]. *力学进展*, 2006, **26**(3): 344 ~ 353.]
- Ghosh S, Mallett R L. Voronoi cell finite elements[J]. *Computers & Structures*, 1994, **50**(1): 33 ~ 46.
- Wang Zhao-qing. Study on rational element method [D]. Shanghai: Shanghai University, 2004. [王兆清. 有理单元法研究[D]. 上海: 上海大学, 2004.]
- Sukumar N, Tabarraei A. Conforming polygonal finite elements[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, **61**(12): 2045 ~ 2066.
- Aurenhammer F, Klein R. Voronoi diagram [A]. In: Sack J and Urrutia G, eds. *Handbook of Computational Geometry [C]*, Amsterdam, North-Holland: Elsevier Science Publishers, 2000: 201 ~ 290.
- Green P J, Sibson R R. Computing Dirichlet tessellations in the plane [J]. *The Computer Journal*, 1978, **21**(20): 168 ~ 173.
- Su P, Drysdale R L S. A comparison of sequential Delaunay triangulation algorithms [J]. *Computational Geometry*, 1997, **7**(5 ~ 6): 361 ~ 385.
- Geoge P L, Hecht F, Saltel E. Automatic mesh generation with specified boundary[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991, **24**(2): 269 ~ 288.
- Vigo M, Pla N. Computing directional constrained Delaunay triangulations[J]. *Computers & Graphics*, 2000, **24**(2): 181 ~ 190.
- Seed G M. Delaunay and Voronoi tessellations and minimal simple cycle in triangular region and regular-3 undirected planar graphs[J]. *Advances Engineering Software*, 2001, **32**(1): 339 ~ 351.
- Shimada K, Gossard D C. Automatic triangular mesh generation of trimmed parametric surface for finite element analysis[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1998, **15**(3): 199 ~ 222.
- Indermitte C, Liebling T M, Troyanov M, *et al.* Voronoi diagrams on piecewise flat surfaces and an application to biological growth[J]. *Theoretical Computer Science*, 2001, **263**(1-2): 263 ~ 274.